

# Curso acelerado de buenos modales

Facundo Carreiro

Institute for Logic, Language and Computation  
University of Amsterdam, the Netherlands

4 de Mayo, 2012

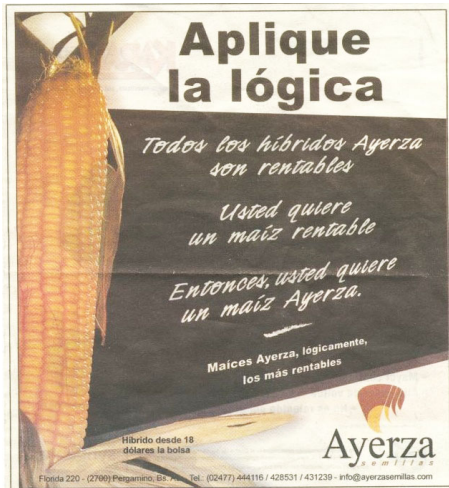
Dto. de Computación – FCEyN, Argentina

¿Por qué estudiar Lógica Formal?

# Un poco de historia

350 A.C., Grecia: Aristóteles y los Estoicos

## Silogismos categóricos



**Aplique  
la lógica**

*Todos los híbridos Ayerza  
son rentables*

*Usted quiere  
un maíz rentable*

*Entonces, usted quiere  
un maíz Ayerza.*

**Maíces Ayerza, lógicamente,  
los más rentables**

Híbrido desde 18  
dólares la bolsa

**Ayerza**  
semillas

Florida 220 - (2700) Pergarino, Es. A. Tel.: (02477) 444116 / 428531 / 431239 - info@ayerzasemillas.com

Todos los A son B  
Algunos A son P.

---

Algunos B son P ∴

← Ojo, está mal!

# Un poco de historia

350 A.C., Grecia: Aristóteles y los Estoicos

## *Modalidades*

“Una modalidad califica la verdad de un juicio”

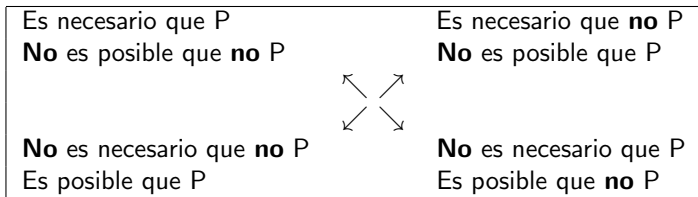
Juicio: Juan es feliz.

- Juan es necesariamente feliz / Es necesario que Juan sea feliz.
- Juan es posiblemente feliz / Es posible que Juan sea feliz.
- Juan fue feliz.
- Juan será feliz.

# Un poco de historia

350 A.C., Grecia: Aristóteles y los Estoicos

## *Cuadrado de oposición modal*



## *Implicación material*

P	Q	P → Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

## Paradoja de los borrachos

“En toda fiesta existe una persona tal que si esa persona está borracha entonces *todos* están borrachos.”

$$\forall f. \exists \ell \in f. (\text{borracho}(\ell) \rightarrow \forall p \in f. \text{borracho}(p))$$

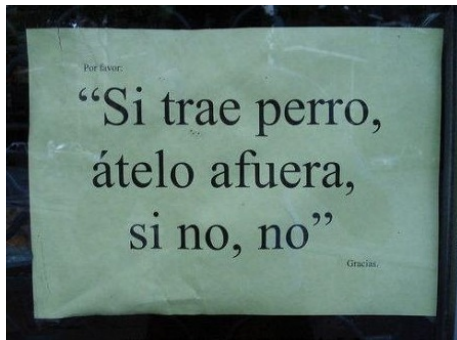
*Demostración.*

- Tomemos una fiesta cualquiera  $f$ , hay dos opciones
  - 1 Todos estan borrachos
  - 2 Hay al menos una persona  $j$  que no está borracha
- En el caso 1 podemos tomar a cualquiera como  $\ell$ 
  - $\text{borracho}(p)$ , el consecuente, es verdadero
  - entonces la implicación es verdadera
- En el caso 2 podemos tomar  $\ell := j$ 
  - $\text{borracho}(\ell)$  es siempre falso
  - entonces la implicación es siempre verdadera!

# Sintaxis

## Lógica proposicional

- Variables proposicionales:  $p$ ,  $q$ , *azul*, *feliz*, ...
- Negación ( $\neg$ ), Conjunción ( $\wedge$ ), Disjunción ( $\vee$ )
- Implicación material ( $\rightarrow$ )



$$\varphi := (\text{perro} \rightarrow \text{atado\_afuera}) \wedge (\neg \text{perro} \rightarrow \neg \text{atado\_afuera})$$

# Lógica modal

## *Sintaxis*

- Toda la lógica proposicional
- Operadores modales: Diamante ( $\diamond$ ), Box ( $\square$ )

## *Posibles interpretaciones de $\square\varphi$*

- Alética: Es necesario que  $\varphi$  sea verdadera.
- Temporal: En todo momento en el futuro  $\varphi$  es verdadera.
- Deóntica: Es obligatorio que  $\varphi$  sea verdadera.

## *Posibles interpretaciones de $\diamond\varphi$*

- Alética: Es posible que  $\varphi$  sea verdadera.
- Temporal: En algún momento en el futuro  $\varphi$  es verdadera.
- Deóntica: Está permitido que  $\varphi$  sea verdadera.

Observar que  $\diamond \equiv \neg\square\neg$  y  $\square \equiv \neg\diamond\neg$ .



# La máquina de hacer chorizos

Una forma de ver la lógica

*La escuela sintáctica*

**Logica** = Lenguaje + Axiomas + Reglas de inferencia

Lenguaje ✓

*Axiomas*

- Axiomas proposicionales
- Axiomas modales, por ejemplo  
**K**:  $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$
- Otros según interpretación

*Reglas de inferencia*

- Reglas proposicionales (Modus Ponens)
- Necesitación:  $\frac{p}{\Box p}$



*C.I. Lewis (1910)*

# Lógica epistémica-doxástica

## Motivaciones y ejemplos<sup>1</sup>

Estudia la interacción en sistemas multi-agente:

- *Computación*: internet, robots, criptografía.
- *Juegos*: poker, ajedrez.
- *Economía*: bolsa, mercado, negociaciones.
- *Social*: redes sociales, sociología.

Estos sistemas son *dinámicos* e *informacionales*

- 1 Acciones: compra/venta, envío/recepción de mensajes, etc.
- 2 Información: sobre c/agente y sobre el contexto
  - Conocimiento: información verdadera
  - Creencia: información justificada (pero tal vez falsa)

---

<sup>1</sup>Basado en contenido del curso "Topics in Dynamic Epistemic Logic" de Alexandru Baltag.

# Lógica epistémica-doxástica

Ejemplo: Reglas de tránsito

Supongan que:

- Todos saben las reglas de tránsito
- Todos respetan las reglas que conocen

**Pregunta:** ¿Es suficiente como para sentirse seguro al manejar?

**Respuesta:** No. ¡Pensá porqué!



# Lógica epistémica-doxástica

Ejemplo: Paradoja del examen sorpresa

La profesora le dice a sus alumnos

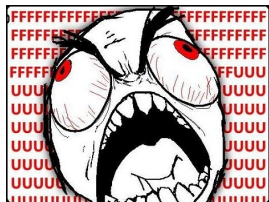
- El examen final va a ser la semana que viene.
- El examen va a ser **sorpresa**: incluso la noche anterior al examen, no van a saber el día del examen.

Uno de sus alumnos, que sabe lógica, razona por 'inducción hacia atrás':

L	M	M	J	V
X	X	X	X	X

**Ergo:** El examen no puede ocurrir!

Llega el miércoles y le toman el examen...



# Lógica epistémica-doxástica

## Lógica y axiomas

El lenguaje es multimodal, hay dos modalidades básicas distintas

- $\Box_1 := K$ : ' $K\varphi$ ' es 'El agente *sabe* que  $\varphi$  es verdadera'.
- $\Box_2 := B$ : ' $B\varphi$ ' es 'El agente *cree* que  $\varphi$  es verdadera'.

Se usan los siguientes axiomas

- 1  $K\varphi \rightarrow KK\varphi$ : introspección positiva (K)
- 2  $\neg K\varphi \rightarrow K\neg K\varphi$ : introspección negativa (K)
- 3  $K(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (K\varphi \rightarrow K\psi)$ : omnisciencia lógica
- 4  $\neg B(\varphi \wedge \neg\varphi)$ : consistencia de creencias
- 5  $B\varphi \rightarrow KB\varphi$ : introspección positiva fuerte (B)
- 6  $\neg B\varphi \rightarrow K\neg B\varphi$ : introspección negativa fuerte (B)
- 7  $K\varphi \rightarrow B\varphi$ : conocimiento implica creencia
- 8  $K\varphi \rightarrow \varphi$ : conocimiento verdadero

# Lógica epistémica-doxástica

## Introspección

*As we know,  
There are known knowns.  
There are things we know we know.  
We also know  
There are known unknowns.  
That is to say we know there are some things  
We do not know.  
But there are also unknown unknowns,  
The ones we don't know  
We don't know.*

– Donald Rumsfeld, 12/2/2002, DoD news briefing

# Leyes y lógica deóntica

## Ejemplo<sup>2</sup>

### Capítulo 1: Estudiantes

- Todo individuo que se inscribió a la universidad y no se graduó es considerado un estudiante.

### Capítulo 2: Docentes

- Hay 3 categorías de docentes: Ay2, Ay1, Profesores.
- Para ser docente uno debe presentarse a concurso y ser seleccionado.
- Para ser Ay2 el candidato debe ser estudiante al momento del concurso.

### Capítulo 3: Biblioteca universitaria

- Si un libro no se devuelve a tiempo se deberá pagar una multa.
- Las multas de los docentes deben ser estrictamente mayores a los de los estudiantes.

---

<sup>2</sup>Extraído de "FormaLex: A tool for legal drafting" (Gorín, Mera, Schapachnik)

# Leyes y lógica deóntica

## Lógica y axiomas

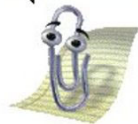
En el lenguaje esta compuesto por

- $O (\Box)$ : ' $O\varphi$ ' es 'Es *obligatorio* que  $\varphi$  sea verdadera'.
- $P (\Diamond)$ : ' $P\varphi$ ' es 'Está *permitido* que  $\varphi$  sea verdadera'.
- $F (O\neg)$ : ' $F\varphi$ ' es 'Esta *prohibido* que  $\varphi$  sea verdadera'.

Aplicaciones en derecho computacional

- Chequeo de inconsistencia de leyes.
- 'Legal drafting': Sugerencia de problemas en leyes y 'autocomplete'.

Parece que usted está intentando escribir una ley...





# Sintaxis y Semántica

## Lógica proposicional

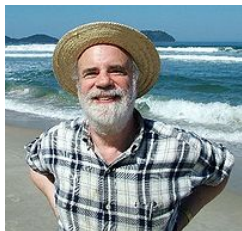
	<b>sintáctico</b>	<b>semántico</b>
<b>objeto</b>	formulas ( $p_i, \neg, \rightarrow, \dots$ )	valuaciones ( $V : \text{prop} \rightarrow \{0, 1\}$ )
<b>concepto</b>	teorema (derivable de los axiomas)	tautología (verdadera en toda valuación)

- LP es completa:  $\varphi$  teorema si y solo si  $\varphi$  tautología
- Saber si una formula es teorema es decidible (NP-completo)

# Sintaxis y Semántica

## Lógica modal

	<b>sintáctico</b>	<b>semántico</b>
<b>objeto</b>	formulas ( $p_i, \neg, \rightarrow, \diamond, \square, \dots$ )	??? (grafos dirigidos etiquetados)
<b>concepto</b>	teorema (derivable de los axiomas)	??? (verdadera en todo ???)

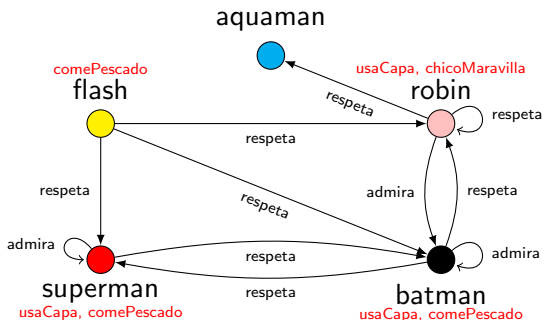


Saul Kripke (1959)

- LMB es completa:  $\varphi$  teorema si y solo si  $\varphi$  validez
- Saber si una formula es teorema es decidible (PSPACE-completo)

# El mejor de todos los mundos posibles

- $\varphi$  es necesario ( $\Box$ ) si vale en todos los mundos posibles
- $\varphi$  es posible ( $\Diamond$ ) si vale en algún mundo posibles

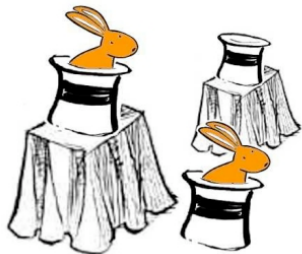


- $\text{aquaman} \stackrel{?}{\models} \langle \text{respeta} \rangle \text{comePescado}$  ❌
- $\text{flash} \stackrel{?}{\models} [\text{respeta}] \text{usaCapa}$  ✅

# Lingüística computacional

## Generación de expresiones referenciales<sup>3</sup>

Motivación: Dar una frase que identifique unívocamente un elemento.



- El conejo que está dentro de la galera que no está sobre la mesa
- El conejo que tiene un conejo a su izquierda
- ...

---

<sup>3</sup> Algunos extractos son del curso "Generación de Lenguaje Natural y Aplicaciones" (EliC 2010, Areces & Benotti)

# Lingüística computacional

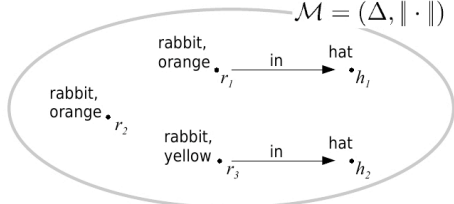
## Generación de expresiones referenciales

Se puede modelar como un grafo dirigido (modelo de Kripke)

$\mathcal{M} = (\Delta, \|\cdot\|)$



$\mathcal{M} = (\Delta, \|\cdot\|)$



Y obtener formulas que valgan **solamente** en el objeto elegido

- $r_1$ :  $orange \wedge \langle in \rangle hat$
- $r_2$ :  $orange \wedge \neg \langle in \rangle hat$
- $r_3$ :  $yellow$

# Verificación de software

## Motivación

- Programas cada vez más grandes
- Usados en contextos cada vez más críticos: aviones, medicina, etc.

```
fbioapu_usr eninfo: 800x600-8 (800x600) 80
fbioapu_usr eninfo: 800x600-8 (800x600) 80

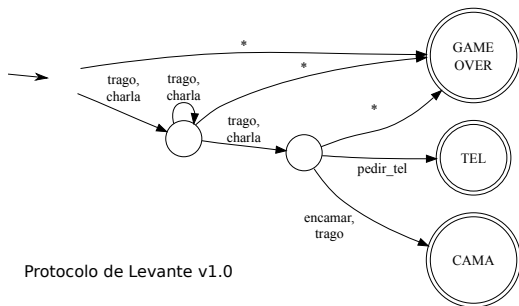
        64 48      64 48  0
        64 48      64 48  0

The system is going down NOW !!
Sending SIGTERM to all processes.
Mar  3 21:16:33 sb580304 syslog.info System log daemon exit
Sending SIGKILL to all processes.
The system is halted. Press Reset or turn off power
ide: status err 25, xfr busy
Power down.
ide: status err 25, xfr busy
ide: status err 25, xfr busy
ide: status err 25, xfr busy
ide: status err 25, xfr busy
ide: status err 25, xfr busy
ide: status err 25, xfr busy
ide: status err 25, xfr busy
ide: status err 25, xfr busy
ide: status err 25, xfr busy
ide: status err 25, xfr busy
```

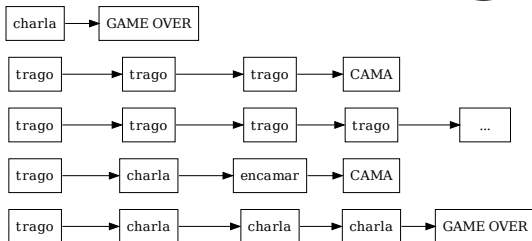
- Testing solo muestra *presencia* de errores
- Nos gustaría verificar que cumplan ciertas propiedades: por ej la ausencia de ciertos errores

# Verificación de software

## Programas y protocolos como Labeled Transition Systems (LTS)



Protocolo de Levante v1.0



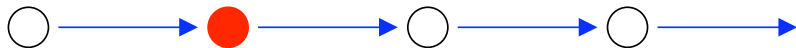
# Verificación de software

## Linear-time Temporal Logic (LTL)

Se interpreta sobre modelos *lineales* (“streams de tiempo discreto”)

Tiene los siguientes operadores modales

- $X\varphi$ : “NeXt  $\varphi$ ”



- $\varphi U \psi$ : “ $\varphi$  Until  $\psi$ ”



- $F\varphi$ : “In the Future  $\varphi$ ”



- $G\varphi$ : “Globally in the future  $\varphi$ ”





# Verificación de software

## Linear-time Temporal Logic (LTL)

Se usa para especificar propiedades que deben cumplir las trazas, ej:

- 1  $FG\neg\text{charla}$   
“En algún momento se acaba la charla”
- 2  $F\text{cama} \vee F\text{tel}$   
“Eventualmente termino en la cama o le saco el teléfono”
- 3  $\neg FG(\text{trago} \wedge X\text{trago})$   
“No va a tenerme comprándole tragos indefinidamente”
- 4 ...

Verificar las propiedades es decidible.

## Semantica topológica

- Variables proposicionales son subconjuntos de  $\mathbb{R}$
- $\vee$ ,  $\wedge$  y  $\neg$  representan union, intersección y complemento
- $\diamond$  es interpretado como *clausura* ( $\square$  como *interior*)

(1)	$X \subseteq \mathfrak{C}(X)$	$p \rightarrow \diamond p$
(2)	$\mathfrak{C}(\mathfrak{C}(X)) = X$	$\diamond\diamond p \leftrightarrow \diamond p$
(3)	$\mathfrak{C}(\emptyset) = \emptyset$	$\diamond\perp \leftrightarrow \perp$
(4)	$\mathfrak{C}(X \cup Y) = \mathfrak{C}(X) \cup \mathfrak{C}(Y)$	$\diamond(p \vee q) \leftrightarrow \diamond p \vee \diamond q$

Esta interpretación puede extenderse a espacios topológicos arbitrarios.

**S4** es la lógica modal de

- 1  $\mathbb{R}$
- 2 Todos los espacios topológicos

O sea, S4 puede expresar pocas propiedades topológicas interesantes.  
(Hay otras extensiones con mayor poder expresivo!)

# El Santo Grial

¿Cómo convencer a cualquiera de que haga **X**?



“¿Si te dijera que hicieras **X**, tu respuesta a esa pregunta sería la misma que a esta pregunta?”

*Demostración.*

- 1 Responde SI: Entonces la respuesta a “Harías X” es SI.
- 2 Responde NO: Entonces la respuesta a “Harías X” no es NO, entonces es SI.

¿Si les dijera que

**aportaran al menos \$5 para las  
charlas de borrachos**

su respuesta a esa pregunta sería la misma que a esta pregunta?

**Fin. ¡Gracias!**